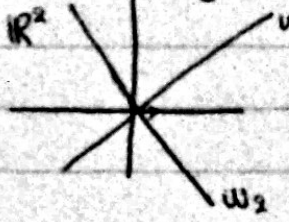
18/03/15

$(V, < >)$ χώρος εσωτερικού γινομένου (πραγματικός ευκλείδιος χώρος)

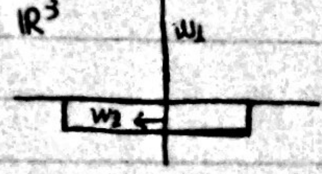
ΟΡΙΣΜΟΣ 193

Έστω $(V, < >)$ Χ.Ε.Γ και W_1, W_2 υπόχωροι του V. Οι W_1, W_2 λέγονται ορθογώνιοι αν $<z_1, z_2> = 0_{\mathbb{R}}$ για κάθε $z_1 \in W_1$ και για κάθε $z_2 \in W_2$

π.χ στον $\mathbb{R}^2$

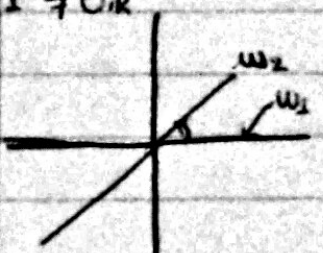


π.χ στο $\mathbb{R}^3$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν $V = \mathbb{R}^2$ με σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Τότε οι υπόχωροι $W_1 = <(1,0)>$ και $W_2 = <(0,1)>$ είναι κάθετοι, το ίδιο και οι υπόχωροι $W_1 = <(1,1)>$ $W_2 = <(-1,1)>$ ενώ οι υπόχωροι $W_1 = <(1,0)>$, $W_2 = <(1,1)>$ δεν είναι γιατί $<(1,0),(1,1)> = 1\cdot 1 + 1\cdot 0 = 1 \neq 0_{\mathbb{R}}$



ΠΡΟΤΑΣΗ 194

Έστω $(V, < >)$ Χ.Ε.Γ και W_1, W_2 ορθογώνιοι υπόχωροι στο V. Τότε το άθροισμα $W_1 + W_2$ είναι ευθύ, δηλ. $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$

Απόδειξη Έστω $v \in W_1 \cap W_2$. Τότε $v \in W_1$ και $v \in W_2$. Αφού W_1, W_2 ορθογώνιοι $<v, v> = 0_{\mathbb{R}}$ $\Rightarrow v = 0_V$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ 195 Η βάση $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ λέγεται ορθοκανονική αν $<e_i, e_j> = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases}$

ΠΡΟΤΑΣΗ 195b

Έστω $(V, < >)$ Χ.Ε.Γ πεπερασμένης διάστασης (δηλ. $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$) Τότε ο V έχει ορθοκανονική βάση. Απόδειξη Άμεση από τον επόμενο αλγόριθμο 196

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 196 (Gram-Smith)

Έστω $(V, < >)$ Χ.Ε.Γ πεπερασμένης διάστασης και $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ βάση του V.

Ο αλγόριθμος κατασκευάζει [illegible]

ΒΗΜΑ 1ο: Κατασκευάζουμε βοηθητική βάση $h=(h_1,\dots,h_\nu)$ του V με την ιδιότητα $\langle h_i,h_j\rangle = 0_{\mathbb{R}}$ για $i\neq j$. Θέτουμε $h_1=g_1$, $h_2=g_2-\frac{\langle g_2,h_1\rangle}{\|h_1\|^2}\cdot h_1$
(φανερά $\langle h_1,h_2\rangle = \langle h_1,g_2\rangle - \langle h_1, \frac{\langle g_2,h_1\rangle}{\|h_1\|^2}\cdot h_1\rangle =$
$= \langle h_1,g_2\rangle - \frac{\langle h_1,h_1\rangle}{\|h_1\|^2}\cdot\langle g_2,h_1\rangle = 0_{\mathbb{R}}$ $\quad h_3=g_3-\frac{\langle g_3,h_1\rangle}{\|h_1\|^2}h_1-\frac{\langle g_3,h_2\rangle}{\|h_2\|^2}h_2$

Επαγωγικά: $h_{p+1}=h_{p+1}-\sum_{i=1}^{p}\frac{\langle g_{p+1},h_i\rangle}{\|h_i\|^2}h_i$ Ισχύει ότι $\langle h_i,h_j\rangle=0_{\mathbb{R}}$ για $i\neq j$

ΒΗΜΑ 2ο Θέτουμε $e_i=\frac{h_i}{\|h_i\|}$ για $i=1,2,\dots,n$. Τότε $< e=(e_1,\dots,e_n)>$ ορθοκανονική βάση του V

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 127

Εφαρμόζουμε Αλγόριθμο 126 (Gram-Smith) στη βάση $g_1=(1,1,0)$, $g_2=(2,0,1)$, $g_3=(2,2,1)$ του $\mathbb{R}^3$ → με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Έχουμε $h_1=g_1=\boxed{(1,1,0)}$, $h_2=g_2-\frac{\langle g_2,h_1\rangle}{\|h_1\|^2}h_1=(2,0,1)-\frac{2}{2}(1,1,0)$ $=\boxed{(1,-1,1)}$, $h_3=g_3-\frac{\langle g_3,h_1\rangle}{\|h_1\|^2}h_1-\frac{\langle g_3,h_2\rangle}{\|h_2\|^2}h_2=$

$=(2,2,1)-\frac{4}{2}(1,1,0)-\frac{1}{3}(1,-1,1)=\boxed{(-1/3,1/3,2/3)}$ Επομένως, θέτοντας $e_i=\frac{h_i}{\|h_i\|}$ για $i=1,2,3$ παίρνουμε την ορθοκανονική βάση $e_1=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$
$e_2=(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$ $e_3=(-1/\sqrt{6},1/\sqrt{6},2/\sqrt{6})$

ΟΡΙΣΜΟΣ 128

Έστω $(V,\langle\ \rangle)$ Χ.Ε.Γ πεπερασμένης διάστασης και $W\neq\{0_V\}$ υπόχωρος, $z\in V-W$. Λέμε ότι το $w\in W$ είναι ένα σημείο του W πιο κοντά στο z αν $\|z-w\|\leq\|z-x\|$ για κάθε $x\in W$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 129

Για $z\in V-W$ όπως στον Ορισμό 128. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα
(i) Το w είναι ένα σημείο του W πιο κοντά στο z
(ii) Το $w-z$ είναι κάθετο στο W δηλ. $\langle w-z,x\rangle=0$ $\forall x\in W$
ΑΠΟΔΕΙΞΗ: (i)⇒(ii) Έστω $x\in W$. Ορίζουμε $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(t)=\|z-w+tx\|^2$. Έχουμε $f(t)=\langle z-w+tx,$ $z-w+tx\rangle=\langle z-w,z-w\rangle+2t\langle z-w,x\rangle+t^2\|x^2\|$ Φανερά f ... άρα παραγωγίσιμη. Από υπόθεση ... $f'(0)=0$
$\langle z-w,x\rangle=0_{\mathbb{R}}$ Άρα το (ii)

(ii) => (i) Υποθέτουμε $\langle z-w, x\rangle = 0_{\mathbb{R}}$ Τότε για $x \in W$ $\|z-x\|^2 = \|(z-w)+(w-x)\|^2 =$
$\langle (z-w)+(w-x), (z-w)+(w-x)\rangle = \langle z-w, z-w\rangle + \langle z-w, w-x\rangle + \langle w-x, z-w\rangle +$
$+ \langle w-x, w-x\rangle = \|z-w\|^2 + 0 + 0 + \|w-x\|^2 \geq \|z-w\|^2$ και το (i) έπεται

ΠΡΟΤΑΣΗ 130

$(V, \langle\ \rangle)$, W, z όπως στον Ορισμό 128. Τότε υπάρχει $w \in W$ πιο κοντά στο z, ισχύει $w-z$ κάθετο στο W και w είναι μοναδικό

Απόδ. Η ύπαρξη του w προκύπτει από την Παρατήρηση/Αλγόριθμο 131.

Μοναδικότητα w. Έστω w και $w' \in W$ πιο κοντά στο z. Από πρόταση 129 για κάθε $x \in W$

$$\begin{cases} \langle w-z, x\rangle = 0 \\ \langle w'-z, x\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle w, x\rangle = \langle z, x\rangle \\ \langle w', x\rangle = \langle z, x\rangle \end{cases}$$

Άρα $\langle w, x\rangle = \langle w', x\rangle$ για κάθε $x \in W$ $\Rightarrow \langle w-w', x\rangle = 0_{\mathbb{R}}$. Για $x = w-w'$ έχουμε
$\langle w-w', w-w'\rangle = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow w-w' = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow w = w'$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ/ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 131

Έστω $(V, \langle\ \rangle)$, W, z όπως στον ορισμό 128. Εύρεση $w \in W$ πιο κοντά στο z (Ισοδύναμα από Πρόταση 129 εύρεση $w \in W$ με $z-w$ ορθογώνιο στο W)

ΒΗΜΑ 1ο Βρίσκουμε βάση $g = (g_1, \dots, g_p)$ του W

ΒΗΜΑ 2ο Με χρήση αλγορίθμου 126 (Gram-Schmidt) ξεκινώντας από την βάση g κατασκευάζουμε ορθοκανονική βάση $e = (e_1, \dots, e_p)$ του W.

ΒΗΜΑ 3ο Θέτουμε $w = \langle z, e_1\rangle e_1 + \langle z, e_2\rangle e_2 + \dots + \langle z, e_p\rangle e_p$ Τότε w το ζητούμενο σημείο του W δηλ. το σημείο του W πιο κοντά στο z

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αρκεί ν.δ.ο. $\langle z-w, x\rangle = 0_{\mathbb{R}}$ υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{R}$ με $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$. Άρα $\langle z-w, x\rangle =$
$= \langle z-w, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i\rangle = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle z-w, e_i\rangle$ (1)

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\langle z-w, e_i\rangle = 0_{\mathbb{R}}$ $i = 1, 2, \dots, p$. Έχουμε $\langle z-w, e_i\rangle =$
$\langle z - \sum_{t=1}^{p} \langle z, e_t\rangle e_t, e_i\rangle = \langle z, e_i\rangle - \sum_{t=1}^{p} \langle \langle z, e_t\rangle e_t, e_i\rangle = \langle z, e_i\rangle - \sum_{t=1}^{p} \langle z, e_t\rangle \langle e_t, e_i\rangle$

$= \langle z, e_i\rangle - \langle z, e_i\rangle = 0_{\mathbb{R}}$ Άρα από την (1) το $z-w$ κάθετο στο W.

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ 132 (ΠΑΡΑΛΕΙΠΕΤΑΙ)

ΟΡΙΣΜΟΣ 133

Έστω $(V, \langle\ \rangle)$ χεγ $W \neq \{0_V\}$ υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης και $e = (e_1, \dots, e_p)$ ορθοκανονική βάση του W. Η ορθογώνια προβολή $\pi: V \to W$ είναι η

$\pi(z) = \sum_{i=1}^{p} \langle z, e_i \rangle e_i \in W$. Η π είναι γραμμική απ' τη διγραμμικότητα του $\langle , \rangle$

Από παρατήρηση /αλγόριθμο 131 για $z \in V - W$ $\pi(z)$ είναι το σημείο του W, πιο κοντά στο $z - \pi(z)$ είναι ορθογώνιο στο W. Ενώ από παρατήρηση 120, για $z \in W$ $\pi(z) = z$. Επομένως η π δεν εξαρτάται απ' την επιλογή της ορθοκανονικής e του W